5. ONDES SONORES LONGITUDINALES.

Dans les milieux élastiques: les gaz, les liquides et les solides, des ondes sonores longitudinales se propagent suivant le mécanisme suivant: une couche du milieu se déplace dans le sens de propagation de l'onde (d'où le nom de longitudinal) et comprime la couche suivante laquelle, sous l'effet de la pression avance et comprime la couche suivante et ainsi de suite. Cela fonctionne aussi pour une couche qui recule: la pression sur la couche suivante diminue; ceci fait reculer la couche suivante laquelle diminue à son tour la pression sur la suivante, etc.

La vitesse à laquelle se déplacent ces ondes dépend des caractéristiques du milieu. En général elle est plus faible dans les gaz que dans les liquides et plus faible dans les liquides que dans les solides. Par exemple $\sim 340 m/s$ dans l'air, $\sim 1500 m/s$ dans l'eau et $\sim 5000 m/s$ dans l'acier.

En ce qui concerne les fréquences, il n'y a presque pas de limites. On peut générer des ondes sonores à des fractions de Hz jusqu'à des centaines de MHz. Par référence à la gamme de fréquences audibles à l'être humain, on appelle **infrasons** des fréquences inférieures à $20Hz$ et **ultrasons** des fréquences supérieures à $20KHz$.

Quand les ondes sonores se propagent dans la terre on les appelle **ondes séismiques** car les plus intenses de ces ondes sont produites lors des séismes.

5.1 Équation d'onde.

En général les ondes sont produites par une source de dimensions limitées et, à partir de cette source, se propagent dans toutes les directions. Dans des milieux isotropes le front d'onde d'une perturbation sera sphérique. Nous éviterons d'introduire des coordonnées sphériques en nous limitant à traiter des parties de fronts d'onde suffisamment éloignées de la source et suffisamment petites devant la distance à la source pour que nous puissions assimiler le morceau de sphère à une surface plane. Autrement dit, nous ne traiterons que les ondes planes.

Nous choisirons un système de coordonnées dans lequel l'axe x sera parallèle à la direction de propagation. La perturbation aura les mêmes valeurs pour tous les points d'un même plan (y, z) (perpendiculaire à la direction de propagation).

Dans une onde sonore, les atomes ou molécules qui forment le milieu subissent des déplacements dans la direction de propagation (ici x). Comme ces déplacements ne sont pas simultanés le long de l'axe des x, des couches du milieu se trouveront comprimées et d'autres dilatées par moments. Les couches comprimées auront leur densité[1] ρ (mesurée en $\frac{kg}{m^3}$) augmentée et celles dilatées l'auront diminuée. Nous allons calculer les variations de densité en fonction du déplacement de chaque particule du milieu.

Soit $x_\circ$ la position en x d'une particule du milieu (atome, molécule) en absence d'onde. Si au moment t la position de cette particule est x_1 nous écrirons:

$$x_1 = x_\circ + \xi(x_\circ, t)$$

donc la fonction $\xi(x, t)$ mesure l'écart instantané au temps t d'une particule par rapport à sa position d'équilibre x. Il est évident que $\xi(x, t)$ dépend de la position et du temps.

Prenons un milieu dont la densité, sans onde sonore, est $\rho_\circ$, et examinons la situation d'une couche située, en absence de perturbation, entre x et $x + \delta x$. Au temps t, en présence d'une onde,

[1] Si le mot “densité” vous semble trop roturier vous pouvez le remplacer par “masse volumique” que je trouve ampoulé.

la face gauche de la couche se trouvera en $x + \xi(x,t)$. La face de droite de la couche se trouvera en $x + \delta x + \xi(x + \delta x, t)$.

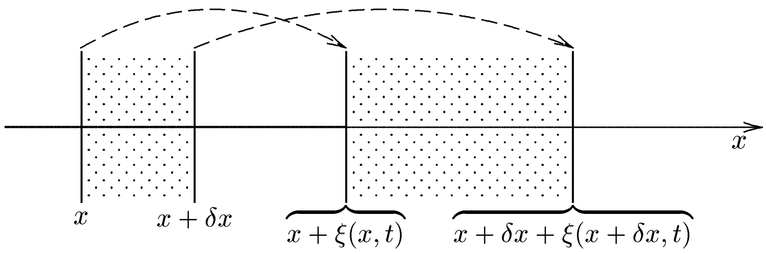

Figure 5.1 Déplacement d'une couche du milieu au passage de l'onde.

La masse d'un morceau de la couche, de surface S, sera la même dans la position d'équilibre que dans la position perturbée. La surface S reste la même dans les deux cas.

$$S\rho_\circ \delta x = S\rho\left[x + \delta x + \xi(x + \delta x, t) - (x + \xi(x,t))\right]$$

en divisant par S:

$$\rho_\circ \delta x = \rho\left[\xi(x + \delta x, t) - \xi(x,t) + \delta x\right] = \rho\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x + \delta x\right]$$

on peut diviser par δx:

$$\rho_\circ = \rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + 1\right)$$

Si on appelle ρ_s les variations de densité dues à l'onde sonore:

$$\rho = \rho_\circ + \rho_s$$

on obtient:

$$\rho_\circ = (\rho_\circ + \rho_s)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + 1\right)$$

$$\rho_\circ = \rho_\circ\frac{\partial \xi}{\partial x} + \rho_\circ + \rho_s + \frac{\partial \xi}{\partial x}\rho_s$$

Comme les variations de densité sont petites ($\rho_s \ll \rho$) on peut négliger le terme de deuxième ordre $\frac{\partial \xi}{\partial x}\rho_s$. Avec cette approximation on obtient:

$$\rho_s = -\rho_\circ\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{5.1}$$

Le mouvement de ces couches du milieu comporte des accélérations qui sont dues à des forces qui sont, elles mêmes, dues à des différences de pression sur les deux faces de la couche. Si nous nommons la pression $P(x,t)$, la force F sur le morceau de couche de surface S et d'épaisseur δx sera:

$$F = S[P(x,t) - P(x + \delta x, t)] = -S\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\delta x$$

La masse du morceau de couche sur lequel est exercée cette force est:

$$\delta m = S\rho\delta x$$

Par définition, l'accélération sera:

$$a = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,t) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

La deuxième Loi de Newton nous dit que $F = ma$:

$$-S\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\delta x = S\rho\delta x\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

En simplifiant:

$$-\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{5.2}$$

On peut exprimer la pression comme la somme d'un terme constant $P_\circ$ plus un terme des variations P_s dû à l'onde sonore:

$$P = P_\circ + P_s$$

avec ceci l'équation (5.2) devient:

$$-\frac{\partial P_s}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{5.3}$$

La pression et la densité ne sont pas indépendantes. Quand la pression augmente le volume d'une masse de gaz, de liquide ou de solide diminue. En conséquence la densité augmente. Pour des variations de pression modérées, les déformations sont proportionnelles aux efforts et nous pouvons écrire:

$$\rho_s = bP_s$$

où b est une constante qui dépend du milieu. En dérivant par rapport à x:

$$\frac{1}{b}\frac{\partial \rho_s}{\partial x} = \frac{\partial P_s}{\partial x}$$

En remplaçant $\frac{\partial P_s}{\partial x}$ dans l'équation (5.3) nous obtenons:

$$-\frac{1}{b}\frac{\partial \rho_s}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{5.4}$$

Si nous dérivons l'équation (5.1) par rapport à x nous obtenons:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial x} = -\rho_\circ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{5.5}$$

Finalement nous pouvons remplacer $\frac{\partial \rho_s}{\partial x}$ dans l'équation (5.4):

$$\frac{1}{b}\rho_\circ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{5.6}$$

Nous avions dit, (et nous le justifierons plus loin) que $\rho_s \ll \rho$. Cela veut dire que le rapport $\frac{\rho_\circ}{\rho}$ est presque égal à 1. Avec cette approximation l'équation (5.6) devient:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = b\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{5.7}$$

Ceci est l'équation d'onde des ondes sonores dans un milieu. La vitesse des ondes est:

$$v = \frac{1}{\sqrt{b}}$$

où b est le rapport entre les variations de densité du milieu et les variations de pression qui les ont produites. Le fait que la densité du milieu n'apparaisse pas explicitement dans la formule (5.7) ne veut pas dire que les propriétés de l'onde soient indépendantes de ρ, car la constante b peut dépendre de ρ et de bien d'autres choses (comme la température).

Une fois connu $\xi(x,t)$, on peut calculer P_s. Dans l'équation (5.1) on peut remplacer ρ_s par bP_s:

$$P_s = -\frac{\rho_\circ}{b}\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{5.8}$$

5.1.1 Puissance transportée.

Nous ne ferons le calcul de la puissance transportée que pour le cas des ondes sinusoïdales. Dans ce cas ξ sera de la forme:

$$\xi = \xi_\circ \cos(\omega t - kx)$$

où, comme d'habitude $k = \frac{\omega}{v}$

Comme ξ est connu, nous pouvons calculer la pression correspondante:

$$P_s = -\frac{\rho_\circ}{b}\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\rho_\circ k}{b}\xi_\circ \sin(\omega t - kx)$$

Pour calculer la puissance transportée par une onde sonore nous allons calculer le travail effectué, pendant une période, sur une surface S située sur un plan perpendiculaire à l'axe des x et de coordonnée x.

La force exercée sur cette surface sera:

$$F = SP_s$$

Le travail effectué quand cette surface se déplace de $d\xi$ sera:

$$dW = Fd\xi = SP_s d\xi$$

Comme nous faisons un calcul pour les déplacements ξ d'une couche dont la position d'équilibre x ne varie pas, seule la variable t varie:

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t}dt = -\omega\xi_\circ \sin(\omega t - kx)dt$$

En remplaçant nous obtenons:

$$dW = S\frac{\rho_\circ k\omega}{b}\xi_\circ^2 \sin^2(\omega t - kx)dt$$

Le travail exercé pendant une période ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) sera:

$$W = S\frac{\rho_\circ k\omega}{b}\xi_\circ^2 \int_\circ^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t - kx)dt$$

On laisse au lecteur studieux le soin de démontrer que la valeur de l'intégrale est $\frac{\pi}{\omega}$([2]). En remplaçant:

$$W = S\frac{\rho_\circ k\omega}{b}\xi_\circ^2\frac{\pi}{\omega} = S\frac{\rho_\circ k\pi}{b}\xi_\circ^2$$

Pour calculer la puissance il faut diviser ce travail par le temps dans lequel il a été effectué ($\frac{2\pi}{\omega}$). Et pour calculer la puissance transmise par unité de surface il faut diviser par la surface:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = \frac{\rho_\circ k\pi}{b}\frac{\omega}{2\pi}\xi_\circ^2 = \frac{\rho_\circ k\omega}{2b}\xi_\circ^2$$

si nous remplaçons k par $\frac{\omega}{v}$ et $\frac{1}{b}$ par v^2 nous obtenons:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\rho_\circ v\omega^2\xi_\circ^2 \tag{5.9}$$

Si, à la place de l'amplitude $\xi_\circ$, on préfère utiliser la valeur efficace (ou valeur quadratique moyenne) ξ_{eff}:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = \rho_\circ v\omega^2\xi_{eff}^2 \tag{5.10}$$

([2]) Vous pouvez tenter le changement de variable $\theta = \omega t$ puis remplacer $\sin^2\alpha$ par $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$.

Plus loin nous aurons besoin d'exprimer la puissance transportée en fonction de la pression. Faisons-le tout de suite. La pression P_s due à l'onde est:

$$P_s = -\frac{\rho_\circ k}{b}\xi_\circ \sin(\omega t - kx)$$

L'amplitude P_m de la pression sera:

$$P_m = \frac{\rho_\circ k}{b}\xi_\circ = \rho\omega v \xi_\circ \tag{5.11}$$

et sa valeur efficace sera:

$$P_{eff} = \frac{\rho_\circ k}{b}\xi_{eff} = v^2 \rho_\circ k \xi_{eff} \tag{5.12}$$

finalement:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{\rho_\circ v} P_{eff}^2 \tag{5.13}$$

5.2 Transmission et réflexion.

Comme pour tous les autres types d'onde, quand les ondes sonores longitudinales arrivent à la frontière entre deux milieux, une partie de la puissance est transmise et une autre est réfléchie. Les conditions de continuité demandent que le déplacement ξ des particules soit égal de chaque côté de la frontière et que la pression soit aussi égale de chaque côté. Cette dernière condition est une conséquence directe de la première loi de Newton. Sur une surface hypothétique à la frontière, les forces de chaque côté doivent s'annuler et les forces sont égales au produit de la pression par la surface.

Nous appellerons ξ_i, ξ_r et ξ_t les amplitudes des déplacements dus aux ondes incidente, réfléchie et transmise respectivement. Nous travaillerons en régime sinusoïdal et nous placerons l'origine de x à la frontière entre les deux milieux. Le déplacement du côté de l'onde incidente (indice 1) sera:

$$\xi_1 = \xi_i \sin(\omega t - k_1 x) + \xi_r \sin(\omega t + k_1 x)$$

du côté de l'onde transmise (indice 2) nous aurons:

$$\xi_2 = \xi_t \sin(\omega t - k_2 x)$$

et la première condition limite sera:

$$\xi_i \sin(\omega t - k_1 x) + \xi_r \sin(\omega t + k_1 x) = \xi_t \sin(\omega t - k_2 x) \qquad \text{pour } x = 0$$

ce qui donne:

$$\xi_i + \xi_r = \xi_t$$

La deuxième condition limite concerne la pression. Nous avions trouvé (équation 5.8) que la pression était:

$$P = -\frac{\rho_\circ}{b}\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

où $b = 1/v^2$. La condition limite s'écrira donc:

$$\xi_i v_1^2 \rho_1 k_1 \cos(\omega t - k_1 x) + \xi_r(-v_1^2 \rho_1 k_1)\cos(\omega t + k_1 x) = \xi_t v_2^2 \rho_2 k_2 \cos(\omega t - k_2 x) \qquad \text{pour } x = 0$$

ce qui nous donne:

$$\xi_i v_1^2 \rho_1 k_1 - \xi_r v_1^2 \rho_1 k_1 = \xi_t v_2^2 \rho_2 k_2$$

Mais

$$v^2\rho k = v^2\rho\frac{\omega}{v} = \omega\rho v$$

En les remplaçant sous cette forme et en simplifiant les ω, la condition limite concernant la pression devient:

$$\rho_1 v_1 \xi_i - \rho_1 v_1 \xi_r = \rho_2 v_2 \xi_t$$

Ceci nous donne le système:

$$\xi_t - \xi_r = \xi_i$$
$$\rho_2 v_2 \xi_t + \rho_1 v_1 \xi_r = \rho_1 v_1 \xi_i$$

dont la solution est:

$$\xi_t = \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}\xi_i \tag{5.14}$$
$$\xi_r = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}\xi_i \tag{5.15}$$

5.3 Ondes sonores dans les gaz.

L'équation (5.7) est valable dans tous les milieux. Il nous reste à préciser la valeur de la constante b pour les gaz. Cette constante est:

$$b = \frac{\partial\rho}{\partial P}$$

(il est indifférent d'utiliser ρ ou ρ_s ou P ou P_s car $\rho_\circ$ et $P_\circ$ sont constants).

Il faut revenir sur le comportement des gaz. En chimie (et en physique) on apprend que $PV = NRT$ où P est la pression, V le volume, T la **température absolue**([3]), N le nombre de **moles** ([4]) et R une constante égale à 8,31$\frac{joule}{mol\ K}$.

Les physiciens utilisent une formule similaire: $PV = nNkT$. Ici N est le nombre de molécules (en général au delà de 10^{23}), k est la constante de Boltzman $k = 1{,}38\,10^{-23} joule/K$, et n est une constante qui dépend du type de molécule. Pour des gaz monoatomiques (comme les gaz nobles He, Ne, Ar, etc.), n vaut $\frac{3}{2}$.

Quand le gaz reste à la même température une masse m de gaz obéira à la relation:

$$PV = C_1$$

où C_1 est une constante. Mais $\rho = \frac{m}{V}$:

$$P\frac{m}{\rho} = C_1$$

et

$$\rho = \frac{m}{C_1}P$$

([3]) La **température absolue** se mesure en **kelvins** (symbole **K**). La température absolue est obtenue en additionnant le nombre 273,15 à la température en degrés Celsius (celle de la vie de tous les jours). La glace fond à 273,15K.

([4]) Le **nombre de moles** (symbole **mol**) est le rapport entre la masse de la substance (élément ou composé chimique) en grammes, et le poids moléculaire de celle-ci. Par exemple 36 grammes d'eau font deux moles car le poids moléculaire de l'eau est égal à 18 (16 pour l'oxygène plus 1 pour chaque atome d'hydrogène).

on déduit que:

$$b = \frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{m}{C_1}$$

Les premiers essais de calcul théorique de la vitesse du son dans les gaz furent faits avec cette hypothèse et conduirent à un échec. La raison est que dans une onde sonore le gaz ne reste pas à la même température, mais celle-ci oscille légèrement autour de la température sans onde sonore. Quand on comprime un gaz sa température augmente (et réciproquement quand on le détend il se refroidit). Vous avez pu le constater en gonflant un pneu de bicyclette avec une pompe manuelle. Si vous comprimez une masse de gaz en diminuant son volume par deux, sa pression doublera si sa température reste la même. Mais pour cela il faut qu'il puisse se refroidir et revenir à sa température d'origine. S'il ne peut pas se refroidir, sa température sera plus élevée et sa pression plus grande que le double de la pression originale.

Dans une onde sonore une zone de gaz n'a pas le temps d'échanger de la chaleur avec les zones voisines. On appelle ces processus, sans échange de chaleur, processus **adiabatiques**. Dans ce cas les gaz obéissent à la relation:

$$PV^\gamma = C_1$$

où C_1 est une constante et où γ est une autre constante qui dépend du type de molécule du gaz. Pour les gaz monoatomiques $\gamma = 1{,}67$. Pour les gaz diatomiques $\gamma = 1{,}40$ et pour les polyatomiques γ prend des valeurs entre 1,2 et 1,31. Mais il ne faut pas trop se fier à ces valeurs... γ dépend de la température!

Le fait que γ dépende de la température n'est pas trop gênant car les variations de température dues à une onde sonore sont infimes et on peut la considérer constante.

Calculons la valeur de la constante $b = \frac{\partial \rho}{\partial P}$ pour un processus adiabatique. Prenons une masse m de gaz. Pour cette masse

$$PV^\gamma = C_1 \tag{5.16}$$

où C_1 est constante. La densité ρ dans ces conditions sera:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{5.17}$$

Pour calculer b il nous faut exprimer ρ en fonction de P. De l'équation (5.16) on peut sortir V:

$$V = C_1^{\frac{1}{\gamma}} P^{-\frac{1}{\gamma}}$$

et le remplacer dans l'équation (5.17):

$$\rho = m C_1^{-\frac{1}{\gamma}} P^{\frac{1}{\gamma}}$$

et calculer b:

$$b = \frac{\partial \rho}{\partial P} = m C_1^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} P^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

On peut éliminer C_1 en le remplaçant par sa valeur tirée de l'équation (5.16):

$$C_1^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{P^{-\frac{1}{\gamma}}}{V}$$

On obtient:

$$b = \frac{m}{V} \frac{1}{\gamma} P^{-\frac{1}{\gamma}} P^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

mais $\rho = \frac{m}{V}$

$$b = \frac{m}{\gamma V P} = \frac{\rho}{\gamma P} \tag{5.18}$$

Finalement la vitesse du son dans un gaz sera:

$$v = \frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \tag{5.19}$$

Calculons la vitesse du son dans l'air dans des **conditions normales** ([5]). Il nous reste à connaître la densité de l'air dans cette situation.

La densité de l'air en conditions normales est $\rho = 1{,}293\, kg/m^3$. La vitesse du son dans l'air en conditions normales sera:

$$v = \sqrt{\frac{1{,}40 \cdot 1{,}013\, 10^5}{1{,}293}} = 331{,}2 \frac{m}{s}$$

La valeur expérimentale est $331{,}4 \frac{m}{s}$. Ceci prouve la validité du modèle et justifie, à posteriori, les approximations faites.

Malgré les apparences de l'équation 5.19, la vitesse des ondes sonores ne dépend pas de la pression. La raison est que la densité ρ est proportionnelle à la pression (à température constante), et donc, le rapport P/ρ ne dépend que de la température([6]).

Calculons la vitesse du son dans l'air à la température de $20°C \simeq 293K$. Cette fois, à pression constante la densité est inversement proportionnelle à la température et la nouvelle densité de l'air sera:

$$\rho = 1{,}293 \frac{273}{293} = 1{,}205\, kg/m^3$$

ce qui nous donne une vitesse de $343 \frac{m}{s}$. Quand on dit qu'un avion vole à **Mach** 2([7]), on ne connaît pas vraiment sa vitesse si l'on ne connaît pas la température de l'air dans lequel il vole.

5.3.1 Mesure de l'intensité du son.

Pour caractériser le son on a inventé une unité de mesure: le **Bel** et son sous-multiple le **décibel** qui vaut $\frac{1}{10}$ de Bel. Cette intensité a été définie à partir de la pression sonore efficace (le P_{eff} de la section précédente) et de la pression sonore d'une onde à la limite du seuil auditif. Cette pression efficace de référence vaut $P_{réf} = 2{,}0\, 10^{-5}\, pascal$([8]). Comparez à la pression atmosphérique de $10^5 Pa$. L'intensité sonore I_s d'une onde dont la pression sonore efficace est P_{eff} vaut:

$$I_s = \log_{10} \left(\frac{P_{eff}}{P_{réf}}\right)^2 \quad \text{mesuré en Bels.}$$

Dans d'autres sources, on trouve la définition du Bel à partir d'une intensité de référence de $10^{-12} W/m^2$:

$$I_s = \log_{10} \left(\frac{\mathcal{P}/\mathcal{S}}{10^{-12}}\right) \quad \text{mesuré aussi en Bels.}$$

Les deux définitions sont, évidemment, équivalentes (voir page suivante). Mais, attention!: dans la première formule la lettre P désigne une pression (mesurée en pascals) et dans la deuxième la lettre $\mathcal{P}$ désigne une puissance (mesurée en watts) et dans le numérateur on trouve des $watts/mètres^2$.

En réalité, on utilise rarement le Bel et on lui préfère de décibel ([9]):

$$I_s = 10\, \log_{10} \left(\frac{P_{eff}}{P_{réf}}\right)^2 \quad \text{mesuré en décibels.}$$

La raison de ce choix logarithmique est que la sensation auditive est aussi logarithmique: on a la même impression d'augmentation du son quand celui-ci passe de 1 à 10 que quand il passe de 10 à 100.

([5]) Température $O\,°C = 273{,}15\, K$ et pression 1 Atmosphère $= 1{,}013\, bar = 1{,}013\, 10^5 pascal = 1{,}013\, 10^5 Newton/m^2$.

([6]) Ce n'est vrai que pour des pressions faibles. À des pressions élevées (au delà de $10^7\, Pa = 100\, bars$) le volume occupé par les molécules et les atomes n'est plus négligeable et ρ n'est plus proportionnelle à P.

([7]) L'indice **Mach** est le rapport entre la vitesse de l'objet et celle du son.

([8]) En réalité, seulement 10% des personnes entendent un son de si faible intensité, et encore il faut qu'il se situe entre $2\, KHz$ et $4\, KHz$. Par contre 50% de personnes entendent un son de $20\, dB$ à $1\, KHz$.

([9]) Nous pouvons juste déceler une différence d'intensité entre deux sons dont l'intensité diffère de $1\, dB$.

Pour vous donner une idée de la valeur d'un décibel voici un tableau de valeurs typiques:

Intensité de quelques sources	
Décibels	source
160	Dommages au tympan
140	Seuil de la douleur
120	Seuil de la gêne
100	Atelier de machines lourdes
85	Automobile
75	Usine moyenne
60	Conversation normale
40	Bruit des spectateurs au cinéma
20	Studio de radiodiffusion
10	Chambre anéchoïque
0	Seuil de l'audition

Comme nous l'avons déjà dit la pression sonore minimum qui provoque une sensation auditive est de $2\,10^{-5}Pa_{eff}$ c'est à dire environ 10^{-10} fois plus petite que la pression atmosphérique. Il faut tout de même que la fréquence de cette onde se situe autour de $3KHz$, là où la sensibilité est maximum.

Il est très intéressant de calculer à quelle amplitude de déplacement ξ cela correspond. Nous avions vu (équation (5.12)) que

$$P_{eff} = \rho\omega v\xi_{eff}$$

Donc pour le cas limite et à $1KHz$ nous aurons un déplacement efficace de:

$$\xi_{eff} = \frac{P_{eff}}{\rho\omega v} = \frac{2\,10^{-5}}{1{,}293 \cdot 2\pi 1000 \cdot 331} = 7{,}43\,10^{-12}m$$

Et la valeur crête sera $\sim 1\,10^{-11}m$.

Cette valeur est inférieure au rayon des atomes! La nature nous a doté d'un organe d'une sensibilité exquise.

Il est facile de calculer à quelle valeur de puissance par unité de surface correspond une onde sonore à la limite de l'audition. L'équation (5.13) nous donne:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{\rho_\circ v}P_{eff}^2 = \frac{1}{1{,}239 \cdot 331}\left(2\,10^{-5}\right)^2 = 1\,pW/m^2$$

Comme la surface de la section du canal auditif fait moins d'un cm^2, la puissance qui arrive au tympan est inférieure à $10^{-16}\,W$.

Pour un son de $60\,dB$ correspondant à celui d'une conversation normale, la pression efficace P_{eff} sera:

$$60 = 10\,\log_{10}\left(\frac{P_{eff}}{P_{réf}}\right)^2$$

et

$$P_{eff} = 10^3 P_{réf} = 10^3\;2\,10^{-5} = 2\,10^{-2}Pa$$

et la puissance par unité de surface sera:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{\rho_\circ v}P_{eff}^2 = \frac{1}{1{,}239 \cdot 331}\left(2\,10^{-2}\right)^2 = 1\,\mu W/m^2$$

5.4 Ondes dans les liquides.

Nous avions vu que la vitesse des ondes longitudinales dans un milieu était:

$$v = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial \rho}{\partial P}}}$$

Examinons $\frac{\partial \rho}{\partial P}$ en remplaçant ρ par $\frac{m}{V}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{\partial \frac{m}{V}}{\partial P} = -\frac{m}{V^2}\frac{\partial V}{\partial P}$$

On verra mieux si l'on remplace $\frac{\partial V}{\partial P}$ par $\frac{\Delta V}{\Delta P}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = -\frac{m}{V^2}\frac{\Delta V}{\Delta P} = -\frac{m}{V}\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta P} = -\rho\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta P}$$

La fraction:

$$B = -\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}}$$

c'est-à-dire le rapport entre une variation de pression et la variation relative de volume qu'elle entraîne reçoit le nom de **module d'élasticité volumique**. Remarquez qu'il faut le signe $-$ pour que B soit positif: quand la pression augmente le volume diminue.

Calculons la vitesse du son dans l'eau. Le module d'élasticité volumique est de $2\,10^9\,\frac{kg}{s^2 m}$. La vitesse du son sera:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial \rho}{\partial P}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{B}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1000}{2\,10^9}}} = 1414\,m/s$$

(la densité de l'eau est $1000\,kg/m^3$ et non 1). La valeur mesurée de la vitesse du son dans l'eau est de $1441\,m/s$.

Il peut paraître surprenant que la vitesse du son dans un liquide, qui est beaucoup plus difficile à comprimer qu'un gaz soit seulement 5 fois plus grande que dans un gaz. La raison est que la densité d'un liquide est environ mille fois plus élevée que celle d'un gaz. L'une dans l'autre, les deux propriétés se compensent partiellement.

5.5 Ondes dans les solides.

Pour un solide la situation est similaire. La vitesse du son est:

$$v = \sqrt{\frac{Y'}{\rho}}$$

Cette fois le coefficient Y' est un peu plus compliqué:

$$Y' = -\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}Y$$

où Y est **le module de Young**([10]) et σ le **coefficient de Poisson**([11]). Ces deux coefficients dépendent du milieu et on peut trouver leurs valeurs dans des manuels de physique ou d'ingénierie([12]). Le coefficient de Poisson est toujours compris entre zéro et 0,5.

5.5.1 Ondes longitudinales dans une barre.

Dans le cas d'un solide infini, ou très grand devant la longueur d'onde, le déplacement longitudinal des couches comprime ou décomprime le solide. Mais si, au lieu d'avoir un solide infini, nous avons une barre de dimensions latérales très inférieures à la longueur d'onde, la compression longitudinale donne lieu à une expansion latérale. De même la décompression longitudinale crée une contraction latérale. Il est plus facile de réduire la longueur d'une barre en la comprimant si on permet à la barre de grossir latéralement que si l'on force la barre à garder ses dimensions latérales. En conséquence, à la place du coefficient Y', nous en aurons un autre plus petit.

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

où Y est le module de Young.

En général, la vitesse du son dans les solides qui est indiquée dans les tables est celle dans une barre et non dans un solide étendu.

5.6 La situation réelle.

Dans ce chapitre nous nous sommes limités à des ondes planes et de faible amplitude pour pouvoir ignorer les non-linéarités. Même si nous ne ferons pas de calculs pour d'autres cas, il faut dire un mot sur les ondes sphériques et sur quelques effets non-linéaires remarquables dans des gaz et dans des liquides.

D'un autre côté, les milieux où se propagent les ondes sonores ne sont pas toujours uniformes.

La température de l'atmosphère dépend de l'altitude et, en général, elle est plus basse en haut qu'en bas. La vitesse du son sera donc plus faible en altitude qu'au niveau du sol. Mais de plus, le son ne se transmettra pas en ligne droite: le son émis, en biais, par un avion ou par le tonnerre aura tendance à remonter. De ce fait on n'entend ni le tonnerre ni les bangs supersoniques à plus d'une vingtaine de kilomètres.

([10]) La définition du **module de Young** est la suivante. Soit une barre de longueur ℓ et de section A. Si on applique une force F distribuée sur la section A, la barre subit un changement de longueur $\Delta\ell$ le module de Young est:

$$Y = -\frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta\ell}{\ell}}$$

([11]) Quand vous étirez une barre, elle rétrécit latéralement. Si vous la comprimez longitudinalement, elle grossit latéralement. Le coefficient de Poisson est défini comme le rapport entre la déformation latérale relative et la déformation longitudinale relative. Si une barre de longueur ℓ et d'épaisseur e subit une déformation longitudinale $\Delta\ell$ et que cette déformation provoque un changement d'épaisseur Δe, le **coefficient de Poisson** σ est défini comme:

$$\sigma = -\frac{\Delta e/e}{\Delta\ell/\ell}$$

Le signe $-$ est mis car quand $\Delta\ell$ est positif, Δe est négatif.

([12]) Voir figure 4.4

La vitesse du son dans un liquide dépend de la densité qui, elle même, dépend de la température et aussi, dans le cas de la mer, de la salinité (car elle modifie la densité). Comme pour l'atmosphère, la température de grandes étendues d'eau (lacs, mers), varie avec la profondeur. Le son ne se transmet pas en ligne droite et parfois même, il se réfléchit à l'interface entre deux couches de température différente. La localisation par sonar est un peu plus compliquée qu'il ne le semble.

Dans la croûte terrestre on trouve des variations de densité à petite échelle et à très grande échelle. Les variations à petite échelle (des kilomètres) peuvent servir à la localisation séismique de zones candidates pour des champs de pétrole. À plus grande échelle, les propriétés de la croûte et du manteau terrestre dépendent de la température et de la densité (et donc de la pression) qui dépendent de la profondeur. Sans parler du noyau liquide qui ne permet pas le passage des ondes S mais seulement des ondes P. Les ondes séismiques s'infléchissent et se réfléchissent dans leur parcours souterrain. Les ondes séismiques ne se propagent ni en ligne droite ni à vitesse constante.

5.6.1 Ondes sphériques.

Dans la réalité les ondes sonores sont générées par des sources d'étendue finie. À des distances plus faibles ou comparables à l'étendue de la source, la forme du front d'onde qui s'éloigne de la source peut être très compliquée (imaginez le front d'onde d'un tonnerre provoqué par un éclair tarabiscoté). Mais, loin de la source, elle est vue comme un objet ponctuel et le front d'onde devient de plus en plus sphérique à mesure que l'on s'éloigne de la source.

Si nous regardons un petit morceau de la sphère, la petite surface sphérique sera très peu incurvée et nous pourrons l'assimiler à une surface plane sans faire trop d'erreur. Nous retrouvons les ondes planes que nous avons calculées dans ce chapitre... Mais pas tout à fait! La différence est que l'énergie transportée par l'onde sonore est distribuée dans une surface qui s'agrandit comme R^2 (où R est la distance à la source). Donc la puissance par unité de surface ($\frac{\mathcal{P}}{S}$) doit diminuer comme $1/R^2$ et comme la puissance par unité de surface est proportionnelle à ξ^2 ou à P_s^2 cela implique que dans une onde sphérique, aussi bien le déplacement ξ, que la pression sonore P_s, doivent diminuer comme $1/R$.

Dans le cas des ondes sinusoïdales il faudra modifier l'équation $\xi = \xi_\circ \cos(\omega t - kx)$ en ajoutant un coefficient $1/R$. Si nous appelons r la distance entre la source et la position d'observation, et que, à la place de mesurer la position avec x nous le faisons avec r:

$$\xi = C_1 \frac{\cos(\omega t - kr)}{r}$$

et de même pour la pression sonore:

$$P_s = C_2 \frac{\sin(\omega t - kr)}{r}$$

Remarquez que le terme $1/r$ apparaîtra pour tout type d'onde et non seulement pour des ondes sinusoïdales. Remarquez aussi que le terme $1/r$ n'est valable que pour des distances très grandes devant les dimensions de la source.

5.6.2 Ondes de choc.

Les ondes de choc se produisent dans un gaz pour des perturbations très intenses([13]). Nous avions dit, d'une part, que la vitesse des ondes dans un gaz dépendait de la température, et d'autre part, que les ondes sonores produisaient des variations de pression qui elles, produisaient des variations de température. Donc, une augmentation de pression augmente la température ce qui augmente la vitesse. Pour le cas d'une sinusoïde, les sommets de pression se retrouvent à voyager plus vite que les creux. La sinusoïde se déforme, la pente entre les sommets et les creux de devant augmente ce qui a tendance à créer un front d'onde abrupt entre la partie chaude, derrière le front d'onde et la partie froide juste devant. C'est ce que l'on appelle **onde de choc**. Cette onde de choc se propage à la vitesse qui correspond à sa température et qui est supérieure à celle du son "normal". À mesure que le front d'onde se propage, son amplitude diminue et à la fin, l'onde de choc devient une onde sonore normale. Ce qui est remarquable est que les ondes de choc, aussi bien celles en surpression (plus chaudes et plus rapides) que celles en dépression (plus froides et plus lentes) fusionnent avec les ondes qu'elles rattrapent ou qui les rattrapent. En effet une onde normale qui se fait rattraper par une onde de choc se retrouve à voyager dans une zone chaude dont la vitesse est celle de l'onde qui l'a rattrapée: elles continuent ensemble.

Les ondes de choc sont produites par des explosions et par le passage de mobiles qui se déplacent à vitesse supérieure à celle du son: c'est le "bang" supersonique produit par le passage du Concorde et des avions militaires. À plus petite échelle, le claquement d'un fouet est dû au passage du "mur du son" par l'extrémité du fouet (eh oui!).

5.6.3 Cavitation.

Quand on augmente la pression sur une masse d'eau, son volume diminue, et l'on peut continuer à augmenter la pression sans d'autre changement que la diminution du volume. Par contre si vous diminuez la pression, le volume augmentera mais on ne peut pas diminuer la pression indéfiniment, le mieux que l'on peut faire est de réduire la pression à (presque) zéro. Si on essaye de diminuer la pression en augmentant le volume on ne fera autre chose que créer des espaces vides de liquide([14]) Ces cavités se remplissent immédiatement de vapeur du liquide. Ce phénomène est appelé **cavitation**. Ceci n'arrive pas seulement avec des ondes sonores, mais aussi, et plus couramment, lors de mouvements rapides des objets dans des liquides. Notamment le mouvement des hélices des bateaux. Les petites cavités dans les liquides prennent une forme sphérique en raison de la tension superficielle (cf. bulles dans les boissons gazeuses). Quand les bulles se produisent sur une surface elles prennent la forme d'une demi-sphère (côté sphérique vers le liquide).

Ce qui est intéressant dans la cavitation est ce qui arrive quand la pression redevient plus grande que la pression de vapeur. Les bulles (ou les demi-bulles) vont subitement se rétracter (imploser) et disparaître. La diminution de diamètre est très rapide car plus le diamètre est petit plus les forces de tension superficielle, responsables de cette réduction, augmentent. Le résultat est un formidable (bien que microscopique) "coup de bélier" qui crée momentanément et dans une toute petite zone, des pressions énormes. Ces pressions énormes sont nécessaires pour arrêter très rapidement et dans une distance très petite, l'eau qui converge vers le centre de la bulle.

([13]) Sans exagérer. L'onde de choc du Concorde fait, au niveau du sol une surpression d'environ $100Pa$. Le son est très fort (de l'ordre de $140\,dB$), mais la surpression n'est que un millième de la pression atmosphérique. Les ondes à la sortie des armes à feu ont des surpressions de l'ordre de quelques 10^5Pa.

([14]) En réalité quand on diminue la pression en dessous de la **pression de vapeur**, le liquide bout et dégage de la vapeur. Cette vapeur remplit immédiatement les cavités. Pour l'eau à $100°C$ la pression de vapeur de l'eau est de $1\,bar = 10^5Pa$; à $20°C$ elle est d'environ $2900Pa$.

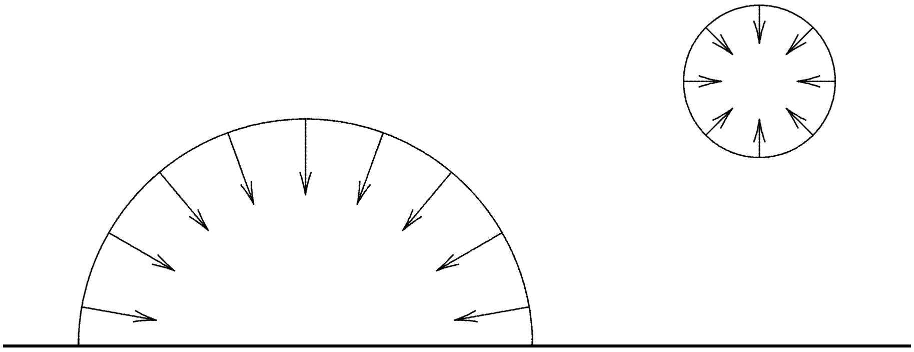

Figure 5.2 Implosion des bulles créées par la cavitation. L'implosion crée un surpression due au “coup de bélier”.

Quand ces pressions énormes ont lieu au milieu du liquide, elles donnent lieu simplement à une onde sonore secondaire. Par contre quand elles ont lieu contre un solide immergé, ces pressions sont l'équivalent d'une petite piqûre d'épingle. Elle peuvent arracher des saletés accrochées à la paroi du solide ou même des morceaux du solide. Dans le premier cas on peut employer la cavitation pour nettoyer des objets. Quant au second il faut l'éviter car on peut abîmer des objets. Les hélices de bateaux soumises à la cavitation se piquent et s'abîment. Si on ajoute de la poudre abrasive dans le liquide, l'implosion des bulles peut projeter des grains de poudre vers les parois et les éroder. On utilise cette méthode pour l'usinage de certaines pièces, par exemple pour percer des trous de forme quelconque.

On peut provoquer cette cavitation par des sons d'amplitude suffisante. On utilise des ultrasons pour éviter la gêne auditive. L'amplitude de l'onde de pression doit être supérieure à la moitié de la pression hydrostatique (égale à la pression atmosphérique pour de faibles profondeurs de liquide). Quand l'onde se réfléchit sur la surface d'un solide, les conditions limites imposent un ventre de pression. Au niveau de l'interface, l'amplitude de pression sera le double et donc plus grande que la pression hydrostatique. Dans la partie dépression du cycle, la pression devient plus petite que la pression hydrostatique et des cavités se créent.

5.7 Exercices.

1 - Calculez la densité de l'oxygène et de l'azote en *conditions normales* à partir de leurs poids moléculaires respectifs de 32 et 28 Daltons. Déduisez la densité de l'air en admettant qu'il est formé par un mélange de 21 parts d'oxygène et 78 parts d'azote (on néglige le 1% restant de gaz nobles, CO_2, eau, etc.). La valeur “officielle” est de 1,293kg/m^3.
Réponse: 1,429 g/ℓ, 1,25 g/ℓ, 1,288 g/ℓ.

2 - Calculez le volume que doit avoir une montgolfière pour pouvoir soulever un masse totale de 500 kg (enveloppe, nacelle, bonbonnes de gaz, brûleurs, instruments, aérostier, passagers, etc.) On admettra que la température de l'air à l'intérieur de l'enveloppe est de 100°C et celle de l'air ambiant de 20°C. Si ce volume calculé avait la forme d'une sphère, quel serait son diamètre?
Réponse: 1936 m^3, 15,5 m.

3 - Pompe à vélo. Calculez de quel facteur il faut réduire un volume d'air en le comprimant de façon adiabatique pour que sa pression augmente d'un facteur 3 (pour gonfler le pneu à 3 $bars$). On admettra que le coefficient adiabatique γ de l'air est de 1,40. Maintenant que vous connaissez le nouveau volume et la nouvelle pression calculez la nouvelle température en degrés centigrades (attention, ça brûle!).

Faites le même calcul pour un vélo de courses équipé de pneus à boyau que l'on gonfle à $8\,bars$.
Réponse: $128°C$, $257°C$.

4 - Démontrez que, si l'on suppose que toute l'atmosphère est à température constante, la pression atmosphérique P en fonction de la hauteur h est:

$$P = P_\circ e^{-Ah} \qquad \text{où} \qquad A = \frac{\rho_\circ g}{P_\circ}$$

où $P_\circ$ et $\rho_\circ$ sont la pression et la densité de l'air pour $h = 0$ et g est l'accélération de gravité.

5 - Tout le monde sait que l'air chaud monte. Presque tout le monde sait que l'air dans l'atmosphère est plus froid en hauteur que près su sol. Peu de monde s'aperçoit de cette contradiction apparente.
L'explication est que, quand un volume quelconque (grand ou petit) d'air monte, il se dilate car la pression diminue en montant. Comme il se dilate sa température diminue. Si cette diminution est telle que sa température devient inférieure à celle de l'air qui l'entoure, sa densité sera plus grande que celle de l'air qui l'entoure et le volume d'air retombera. On aura une situation stable si la diminution de température de l'atmosphère quand on monte est plus faible ou égale à celle que subirait un volume d'air du fait de sa décompression adiabatique quand il monte en hauteur. Ce gradient de température limite, qui permet que de l'air plus froid soit en équilibre au dessus de l'air plus chaud, s'appelle le **gradient adiabatique**.
Démontrez que le gradient adiabatique de l'air est d'environ $1°C$ pour $100\,m$. Pour le faire, calculez la diminution de température d'un volume d'air (à la température ambiante) conséquence de son expansion adiabatique due à une élévation de $100\,m$. Utilisez l'expression de la pression atmosphérique en fonction de la hauteur donnée dans l'exercice précèdent.
Normalement le gradient de température est inférieur au gradient adiabatique et est égal à 6,5°C/km. L'air et la fumée chaude qui sortent de cheminées (ou des échappements des véhicules) montent dans l'atmosphère car, malgré le refroidissement qu'ils subissent en montant, ils restent plus chauds que l'air qui les entoure. Il arrive que des couches hautes de l'atmosphère soient plus chaudes que les couches basses. Les météorologistes appellent la couche chaude de cette situation **couche d'inversion**. *Les fumées butent sur cette couche et ne montent plus: la couche agit comme un couvercle et la pollution ne se disperse pas.*

6 - En parlant normalement, une personne produit un son de $60\,dB$ à $1\,m$ de distance. En admettant que les ondes émises soient des ondes sphériques, calculez à quelle distance l'intensité du son tombera à $10\,dB$ (à ce niveau sonore personne ne peut suivre la conversation).
R.N.: $316\,m$.

7 - Calculez les variations de température dans l'air à $20°C$ dues à des sons de $60\,dB$ et $140\,dB$. Donnez les valeurs crête à crête.
R.N.: $4{,}7\,10^{-5}\,°C$, $0{,}47\,°C$.

8 - Calculez la vitesse, en km/h, du Concorde en sachant que, à son altitude de croisière ($19\,000\,m$), la température de l'air extérieur est de $-57°C$ et qu'il volait à Mach 2,02. Quelle aurait été sa vitesse (toujours en km/h) s'il avait dû voler à Mach 2,02 dans un air à $20°C$.
R.N.: $2142\,km/h$, $2494\,km/h$.

9 - Calculez la vitesse du son dans du CO_2 et dans de l'hélium dans des *conditions normales*. Comme le CO_2 est un gaz triatomique la valeur de γ est de 1,30. L'hélium est monoatomique et $\gamma = 1{,}67$. Le poids moléculaire du CO_2 est $12 + 16 + 16 = 44$ et celui de l'hélium est 4. Calculez les densités en sachant que, en conditions normales, une mole de gaz occupe 22,4 litres.
R.N.: $258{,}9 m/s$ et $973{,}8 m/s$

10 - L'idée que, à l'échelle humaine, l'eau est incompressible, est justifiée. Calculez la diminution de longueur d'une colonne d'eau de $1\,m$ de longueur due à une augmentation de pression de $1\,$*atmosphère* ($1{,}013\,10^5\,Pa$). Vous pouvez imaginer la colonne d'eau comme un cylindre indéformable, fermé à une extrémité et avec un piston à l'autre et rempli, évidemment, d'eau.
Par contre, à l'échelle planétaire, la situation est différente. Refaites le même calcul pour une colonne d'eau de $3\,km$, qui est la profondeur moyenne de l'océan Atlantique. Si la terre n'avait pas d'atmosphère, le niveau de l'océan serait plus haut de la valeur que vous venez d'obtenir. Le module de compressibilité de l'eau est $2\,10^9\,Pa$.
R.N.: $50\,\mu m$, $0{,}15\,m$.

11 - Dans les profondeurs de l'océan, l'eau est soumise à des pressions considérables. La pression est donnée par la formule: $P = \rho g h$ où ρ est la densité de l'eau, g l'accélération de gravité et h la profondeur. Du fait de cette pression, chaque morceau d'une colonne d'eau subit un rétrécissement qui dépend de la profondeur. Calculez le rétrécissement d'une colonne d'eau d'un mètre de longueur située à $3000\,m$ de profondeur. Calculez le rétrécissement total d'une colonne d'eau de $3\,km$ (profondeur de l'océan Atlantique). Si l'eau était incompressible, le niveau des océans serait plus élevé de la valeur que vous venez de trouver. *Faites un calcul approché en prenant la densité de l'eau égale à* $1000\,kg/m^3$*, indépendante de la salinité, de la température et de la pression.*
R.N.: $15\,mm$, $22{,}05\,m$.

12 - Module de Young. Calculez l'allongement d'une barre d'acier d'un mètre de long et de $1\,cm$ de diamètre sous le poids d'une masse de $1\,kg$. Quelle masse faudrait-il lui accrocher pour qu'elle s'allonge de $1\,mm$?
R.N.: $0{,}61\mu m$, $1648\,kg$

13 - Coefficient de Poisson et Y'. Même problème que le précèdent mais, cette fois on empêche les déformations latérales de la barre (par des moyens très coûteux classés secret défense). Calculez le module Y' puis les allongements.
R.N.: $Y' = 305\,10^9$, $0{,}41\mu m$, $2443\,kg$